

**ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι - ΙΟΥΝΙΟΣ 2013**  
**ΘΕΜΑΤΑ και ΛΥΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α1**

Έστω ότι η κίνηση δύο ατόμων ενός μορίου μπορεί να περιγραφεί προσεγγιστικά από ένα δυναμικό της μορφής  $V = -\frac{a}{x^4} + \frac{2a^2}{x^8}$ ,  $a > 0$ , όπου  $x > 0$  η σχετική απόσταση των ατόμων. α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας (ένα ή περισσότερα) και την ευστάθειά τους β) Σχεδιάστε το δυναμικό και το διάγραμμα φάσεων γ) Ποια είναι η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας;

Λύση

α) τα σημεία ισορροπίας είναι οι θετικές (αφού  $x > 0$ ) ρίζες της εξίσωσης

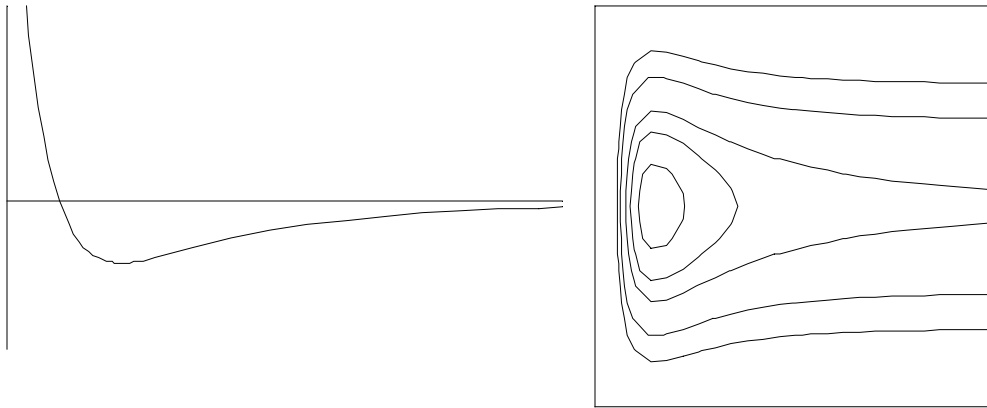
$$F = -\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{4a}{x^5} + \frac{16a^2}{x^9} = 0 \Rightarrow x = x_0 = a^{1/4}\sqrt{2}$$

Στην παραπάνω τιμή έχουμε ακρότατο του δυναμικού, και μάλιστα ελάχιστο αφού

$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_0} = -\frac{20a}{x^6} + \frac{144a^2}{x^{10}} \bigg|_{x=x_0} = \frac{2}{\sqrt{a}} > 0$$

άρα το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.

β) Για το δυναμικό έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} V = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} V = 0$ ,  $V(x_0) = -1/8$ , οπότε η γραφική του παράσταση είναι η παρακάτω. Δίνεται και το αντίστοιχο φασικό διάγραμμα, όπου για  $E < 0$  έχουμε ταλαντώσεις (κλειστές φασικές καμπύλες γύρω από το σημείο ισορροπίας) και για  $E > 0$  οι φασικές καμπύλες ανοίγουν από τα δεξιά επιτρέποντας την κίνηση να πάει στο άπειρο.



γ) Κοντά στο ευσταθές σημείο ισορροπίας η μέθοδος διαταραχών μας δίνει την εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή

$$\ddot{x} + \left( \frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=x_0} x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2}{\sqrt{a}} x = 0 \quad (\omega^2 = \frac{2}{\sqrt{a}})$$

Άρα η περίοδος των ταλαντώσεων θα είναι  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi a^{1/4} \sqrt{2}$

**ΘΕΜΑ 2Α**

(α) Υλικό σημείο κινείται σε κυκλική τροχιά στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων  $F(r) = -\frac{k}{r^2}$ ,  $k > 0$ . Αν απότομα η σταθερά  $k$  ελαττωθεί στο μισό, ναδειχθεί ότι η τροχιά γίνεται παραβολική.

(β) Σώμα μάζας  $m = 4$  κινείται στο πεδίο απωστικών κεντρικών δυνάμεων  $F(r) = \frac{\sqrt{116}}{r^2}$ . Αν τη χρονική στιγμή  $t = 0$  το σώμα βρίσκεται στη θέση  $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$  με ταχύτητα  $\vec{u} = -\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ , να υπολογίσετε την ενέργεια του  $E$  και την στροφορμή του  $\vec{L}$  τη χρονική στιγμή  $t = 2$ .

Λύση

(α) Η ταχύτητα  $u$  με την οποία κινείται το σώμα σε κυκλική τροχιά στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων  $F(r) = -\frac{k}{r^2}$  δίνεται από τη σχέση

$$u^2 = -\frac{r_0 F(r_0)}{m} = \frac{k}{mr_0}.$$

Όταν η σταθερά  $k$  ελαττωθεί στο μισό η ενέργεια το σώματος γίνεται:

$$E = \frac{1}{2}mu^2 + V(r_0) = \frac{1}{2}m \frac{k}{mr_0} - \frac{(k/2)}{r_0} = 0.$$

Επομένως έχουμε παραβολική τροχιά.

(β) Η ενέργεια και η στροφορμή είναι ολοκληρώματα της κίνησης οπότε η τιμή τους παραμένει σταθερή για κάθε χρονική στιγμή. Επομένως η τιμή τους για  $t = 2$  είναι ίδια με την τιμή τους για  $t = 0$ . Για  $t = 0$  έχουμε  $r = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}$  και

$u = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$ . Οπότε παίρνουμε

$$E = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{k}{r} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 11 + \frac{\sqrt{4 \cdot 29}}{\sqrt{29}} = 24,$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{u} = 4 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \left[ (9+4)\hat{i} - (6-4)\hat{j} + (2+3)\hat{k} \right] = 52\hat{i} - 8\hat{j} + 20\hat{k}.$$

**ΘΕΜΑ 3Α**

Θεωρούμε έναν τόπο  $O$  στην επιφάνεια του Βόρειου ημισφαίριου της Γης στον οποίο επικρατούν χαμηλές πιέσεις σε σχέση με τις γειτονικές του περιοχές. Λόγω της διαφοράς της πίεσης οι αέριες μάζες θα κινηθούν προς αυτό τον τόπο. Αφού ορίσετε σαφώς ένα

κατάλληλο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων να μελετήσετε λεπτομερώς το φαινόμενο αυτό. Να εξηγήσετε πως θα κινηθούν αέριες μάζες που ξεκινούν να κινούνται προς τον τόπο Ο από τα τέσσερα σημεία του ορίζοντα (Ανατολή, Δύση, Βορράς, Νότος). Αν ο τόπος Ο βρισκόταν στο Νότιο ημισφαίριο της Γης θα υπήρχαν αλλαγές στην εξέλιξη του φαινομένου; Γιατί;

### Λύση

Παράγραφος 9.8 στο βιβλίο «Θεωρητική Μηχανική, Τεύχος Α» του Ι.Δ.

Χατζηδημητρίου

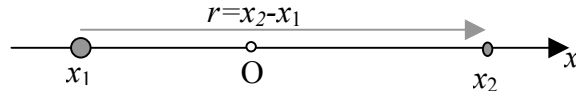
ή παράγραφος 18.1 στο βιβλίο «Εισαγωγή στη Θ.Μ.» του Κ.Χ. Τσίγκανου

### ΘΕΜΑ 4Α

Δύο υλικά σημεία με μάζες  $m_1$  και  $m_2$  βρίσκονται αρχικά σε απόσταση  $r_0$  και ηρεμούν. Αφήνονται ελεύθερα και έλκονται με τη δύναμη βαρύτητας που ασκεί το ένα στο άλλο. Να βρεθεί η σχετική ταχύτητα των δύο σωμάτων όταν θα βρεθούν σε απόσταση  $r=r_0/2$ . Πόση είναι η απόλυτη ταχύτητα των δύο σωμάτων σ' αυτή την απόσταση;

### Λύση

Έστω Ο το κέντρο μάζας των δύο σωμάτων το οποίο είναι ακίνητο, αφού δεν επιδρούν εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα. Τα δύο σώματα θα κινηθούν πάνω στην ευθεία που τα ενώνει (πχ ο άξονας Οx) και η σχετική τους κίνηση θα περιγράφεται από την εξίσωση



$$\mu \ddot{r} = F_{12} \Rightarrow \mu \ddot{r} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}, \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \quad (1)$$

Το σύστημα (1) μπορεί να περιγράψει τη κίνηση ενός σώματος μάζας  $\mu$ , με ταχύτητα

$\dot{r} = v_{\sigma\chi}$ , στο δυναμικό  $V = -\frac{Gm_1m_2}{r}$ . Συνεπώς έχουμε το ολοκλήρωμα της ενέργειας

$$E = \frac{1}{2} \mu v_{\sigma\chi}^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} = -\frac{Gm_1m_2}{r_0} \quad (= E_{\sigma\chi})$$

Από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε

$$v_{\sigma\chi} = -\sqrt{2G(m_1+m_2)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)} \Rightarrow (\text{για } r=r_0/2) \quad v_{\sigma\chi} = -\sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)}{r_0}}$$

όπου το μείον οφείλεται στο ότι  $\dot{r} < 0$  (μειώνεται η απόσταση των σωμάτων)

Η απόλυτη ταχύτητα,  $v_1 = \dot{x}_1$  και  $v_2 = \dot{x}_2$ , των σωμάτων προκύπτει από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{m_2}{m_1+m_2}r \Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{r} \Rightarrow v_1 = m_2\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)r_0}} \\ x_2 &= \frac{m_1}{m_1+m_2}r \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{r} \Rightarrow v_2 = -m_1\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)r_0}} \end{aligned}$$

**ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι - ΙΟΥΝΙΟΣ 2013**  
**ΘΕΜΑΤΑ και ΛΥΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Β1**

Η κίνηση δύο ατόμων ενός μορίου μπορεί να περιγραφεί προσεγγιστικά από ένα δυναμικό της μορφής  $V = -\frac{2a}{x^4} + \frac{1}{ax^8}$ ,  $a > 0$ , όπου  $x > 0$  η σχετική απόσταση των ατόμων.

α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας (ένα ή περισσότερα) και την ευστάθειά τους β) Σχεδιάστε το δυναμικό και το διάγραμμα φάσεων γ) Ποια είναι η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας;

Λύση

α) τα σημεία ισορροπίας είναι οι θετικές (αφού  $x > 0$ ) ρίζες της εξίσωσης

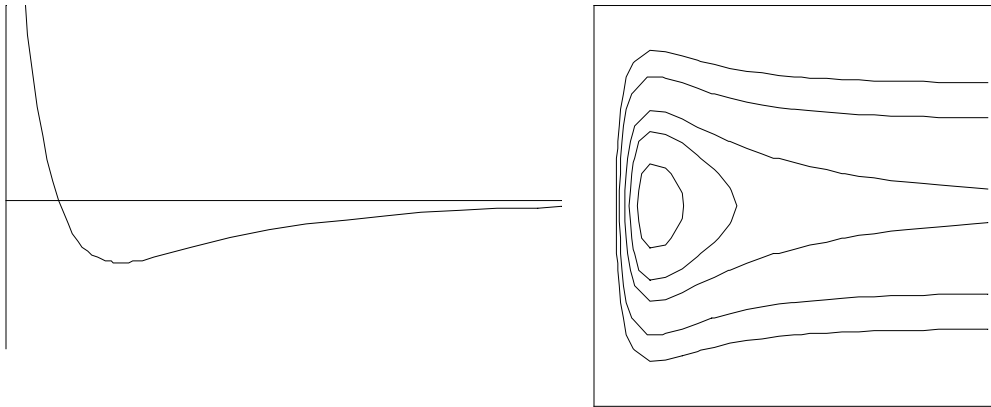
$$F = -\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{8a}{x^5} + \frac{8}{ax^9} = 0 \Rightarrow x = x_0 = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Στην παραπάνω τιμή έχουμε ακρότατο του δυναμικού, και μάλιστα ελάχιστο αφού

$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_0} = -\frac{40a}{x^6} + \frac{72}{ax^{10}} \Big|_{x=x_0} = 32a^4 > 0$$

άρα το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.

β) Για το δυναμικό έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} V = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} V = 0$ ,  $V(x_0) = -a^3 < 0$ , οπότε η γραφική του παράσταση είναι η παρακάτω. Δίνεται και το αντίστοιχο φασικό διάγραμμα, όπου για  $E < 0$  έχουμε ταλαντώσεις (κλειστές φασικές καμπύλες γύρω από το σημείο ισορροπίας) και για  $E > 0$  οι φασικές καμπύλες ανοίγουν από τα δεξιά επιτρέποντας την κίνηση να πάει στο άπειρο.



γ) Κοντά στο ευσταθές σημείο ισορροπίας η μέθοδος διαταραχών μας δίνει την εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή

$$\ddot{x} + \left( \frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=x_0} x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 32a^4 x = 0 \quad (\omega^2 = 32a^4)$$

Άρα η περίοδος των ταλαντώσεων θα είναι  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4a^2}$

**ΘΕΜΑ 2Β**

(α) Υλικό σημείο κινείται σε κυκλική τροχιά στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων

$F(r) = -\frac{k}{r^2}$ ,  $k > 0$ . Αν απότομα η σταθερά  $k$  ελαττωθεί στο μισό, να δειχθεί ότι η

τροχιά γίνεται παραβολική.

(β) Σώμα μάζας  $m = 4$  κινείται στο πεδίο απωστικών κεντρικών δυνάμεων

$F(r) = \frac{\sqrt{116}}{r^2}$ . Αν τη χρονική στιγμή  $t = 0$  το σώμα βρίσκεται στη θέση  $\vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

με ταχύτητα  $\vec{u} = 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ , να υπολογίσετε την ενέργεια του  $E$  και την στροφορμή του  $\vec{L}$  τη χρονική στιγμή  $t = 5$ .

Λύση

(α) Η ταχύτητα  $u$  με την οποία κινείται το σώμα σε κυκλική τροχιά στο πεδίο κεντρικών

δυνάμεων  $F(r) = -\frac{k}{r^2}$  δίνεται από τη σχέση

$$u^2 = -\frac{r_0 F(r_0)}{m} = \frac{k}{mr_0}.$$

Όταν η σταθερά  $k$  ελαττωθεί στο μισό η ενέργεια το σώματος γίνεται:

$$E = \frac{1}{2}mu^2 + V(r_0) = \frac{1}{2}m\frac{k}{mr_0} - \frac{(k/2)}{r_0} = 0.$$

Επομένως έχουμε παραβολική τροχιά.

(β) Η ενέργεια και η στροφορμή είναι ολοκληρώματα της κίνησης οπότε η τιμή τους παραμένει σταθερή για κάθε χρονική στιγμή. Επομένως η τιμή τους για  $t = 5$  είναι ίδια

με την τιμή τους για  $t = 0$ . Για  $t = 0$  έχουμε  $r = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$  και

$u = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$ . Οπότε παίρνουμε

$$E = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{k}{r} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 11 + \frac{\sqrt{4 \cdot 29}}{\sqrt{29}} = 24,$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{u} = 4 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \left[ (2-4)\hat{i} - (-3-12)\hat{j} + (3+6)\hat{k} \right] = -8\hat{i} + 60\hat{j} + 36\hat{k}.$$

**ΘΕΜΑ 3B**

Θεωρούμε έναν τόπο Ο στην επιφάνεια του Βόρειου ημισφαίριου της Γης στον οποίο επικρατούν χαμηλές πιέσεις σε σχέση με τις γειτονικές του περιοχές. Λόγω της διαφοράς της πίεσης οι αέριες μάζες θα κινηθούν προς αυτό τον τόπο. Αφού ορίσετε σαφώς ένα κατάλληλο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων να μελετήσετε λεπτομερώς το φαινόμενο αυτό. Να εξηγήσετε πως θα κινηθούν αέριες μάζες που ξεκινούν να κινούνται προς τον τόπο Ο από τα τέσσερα σημεία του ορίζοντα (Ανατολή, Δύση, Βορράς, Νότος). Αν ο τόπος Ο βρισκόταν στο Νότιο ημισφαίριο της Γης θα υπήρχαν αλλαγές στην εξέλιξη του φαινομένου; Γιατί;

Λύση

Παράγραφος 9.8 στο βιβλίο «Θεωρητική Μηχανική, Τεύχος Α» του Ι.Δ.

Χατζηδημητρίου

ή

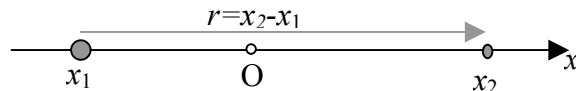
παράγραφος 18.1 στο βιβλίο «Εισαγωγή στη Θ.Μ.» του Κ.Χ. Τσίγκανου

**ΘΕΜΑ 4B**

Δύο ομώνυμα φορτία  $+Q_1$  και  $+Q_2$ , με  $Q_1=Q_2=Q$  και μάζες  $m_1$  και  $m_2$  ( $m_1 \neq m_2$ ) βρίσκονται αρχικά σε απόσταση  $r_0$  χωρίς αρχική ταχύτητα. Αφήνονται ελεύθερα και απωθούνται λόγω της απωστικής δύναμης Coulomb που ασκεί το ένα στο άλλο (και θεωρείται η μόνη δύναμη που δρα στα φορτία). Να βρεθεί η σχετική ταχύτητα των δύο φορτίων όταν θα βρεθούν σε απόσταση  $r=2r_0$ . Πόση είναι η απόλυτη ταχύτητα των δύο φορτίων σ' αυτή την απόσταση;

Λύση

Έστω Ο το κέντρο μάζας των δύο φορτίων το οποίο είναι ακίνητο, αφού δεν επιδρούν εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα. Τα δύο φορτία θα κινηθούν πάνω στην ευθεία που τα ενώνει (πχ ο άξονας Οx) και η σχετική τους κίνηση θα περιγράφεται από την εξίσωση



$$\mu \ddot{r} = F_{12} \Rightarrow \mu \ddot{r} = -\frac{K_{\eta\lambda} Q \cdot Q}{r^2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Το σύστημα (1) μπορεί να περιγράψει τη κίνηση ενός σώματος μάζας  $\mu$ , με ταχύτητα

$\dot{r} = v_{\sigma\chi}$ , στο δυναμικό  $V = \frac{K_{\eta\lambda} Q^2}{r}$ . Συνεπώς έχουμε το ολοκλήρωμα της ενέργειας

$$E = \frac{1}{2} \mu v_{\sigma\chi}^2 + \frac{K_{\eta\lambda} Q^2}{r} = \frac{K_{\eta\lambda} Q^2}{r_0} \quad (= E_{\sigma\chi})$$

Από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε

$$v_{\sigma\chi} = \sqrt{\frac{2K_{\eta\lambda} Q^2}{\mu} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)} \Rightarrow (\text{για } r = 2r_0) \quad v_{\sigma\chi} = Q \sqrt{\frac{K_{\eta\lambda}}{\mu r_0}}$$

όπου θέσαμε το πρόσημο + στην ταχύτητα αφού  $\dot{r} > 0$  (αυξάνεται η απόσταση των φορτίων)

Η απόλυτη ταχύτητα,  $v_1 = \dot{x}_1$  και  $v_2 = \dot{x}_2$ , των φορτίων προκύπτει από τις σχέσεις

$$x_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}r \Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{r} \Rightarrow v_1 = -Q\sqrt{\frac{m_2 K_{\eta\lambda}}{(m_1 + m_2)m_1 r_0}}$$
$$x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}r \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{r} \Rightarrow v_2 = Q\sqrt{\frac{m_1 K_{\eta\lambda}}{(m_1 + m_2)m_2 r_0}}$$

